Point de Fermat

Notations/Définitions : Dans la suite on munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne habituelle.

- Si M et N sont deux points de $\mathbb{R}^2$ on notera $MN := ||N - M||$ la distance euclidienne entre M et N.

Théorème : Soit $\Delta = ABC$ un triangle non dégénéré de $\mathbb{R}^2$. On suppose que les angles de Δ sont strictement inférieurs à $\dfrac{2\pi}{3}$. On pose $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui à un point M associe $AM + BM + CM$. Il existe alors un unique point P dans l'intérieur strict du triangle qui minimise globalement la fonction f.

De plus, $\widehat{APB} = \widehat{APC} = \widehat{BPC} = \dfrac{2\pi}{3}$.

Preuve du théorème :

Étape 1 : Existence d'un minimum

Soit O un point de $\mathbb{R}^2$. Par l'inégalité triangulaire on sait que pour tout point M, $OM \leq OA + AM$ d'où $AM \geq OM - OA$. Ceci étant vrai pour A, B et C on peut sommer cette inégalité de sorte à avoir

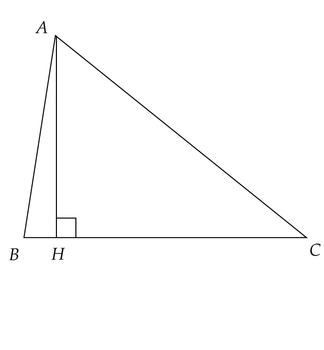
$$f(M) \geq 3OM - f(O).$$

Soit alors $D_O = \{M \in \mathbb{R}^2 : OM \leq \frac{2}{3} f(O)\} = \overline{B\left(O, \frac{2}{3} f(O)\right)}$. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus D_O$ on a $f(M) > f(O)$. De plus, D_0 est compact donc $f_{|D_0}$ atteint ses bornes, donc son minimum (la fonction f est continue car la norme l'est). Soit P un point de D_0 qui minimise f. Alors P minimise globalement f : c'est clair sur D_O et si $M \in \mathbb{R}^2 \setminus D_O$, $f(M) > f(O) \geq f(P)$ car $O \in D_O$.

Étape 2 : Le point P n'est pas un sommet du triangle

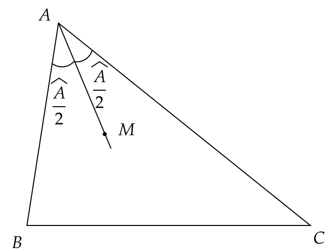
Comme la somme des angles d'un triangle est π on sait qu'au moins deux angles sont strictement inférieurs à $\dfrac{\pi}{2}$. Disons que ce sont les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ (la preuve est la même si l'on prend deux autres angles).

Montrons que $P \neq B$ et $P \neq C$. Comme $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont $< \dfrac{\pi}{2}$, la hauteur qui part de A coupe le segment BC en un unique point noté H :



On a alors $f(H) = AH + BH + CH = AH + BC + BB < AB + BC + BB = f(B)$, donc B n'est pas un minimum. Il en est de même pour C.

Montrons que $A \neq P$. Si $\hat{A} < \frac{\pi}{2}$ on fait comme pour B et C. Sinon $\frac{\pi}{2} \leq \hat{A} < \frac{2\pi}{3}$. Soit alors M un point de la bissectrice intérieure de $\hat{A}$:



On a alors, en posant $\alpha = \frac{\hat{A}}{2}$,

$$\begin{aligned}
MB &= \sqrt{||B - A - (M - A)||^2} \\
&= \sqrt{AB^2 - 2\langle B - A, M - A\rangle + AM^2} \\
&= \sqrt{AB^2 - 2\cos(\alpha)AB \times AM + AM^2} \\
&= AB\left(1 - \frac{1}{2}\left(2\cos(\alpha)\frac{AM}{AB} + \frac{AM^2}{AB^2}\right) + o(AM^2)\right) \\
&= AB - \cos(\alpha)AM + o(AM)
\end{aligned}$$

En faisant pareil avec C on trouve $MC = AC - \cos(\alpha)AM + o(AM)$. On peut alors sommer ces relations et trouver

$$\begin{aligned}
f(M) &= MA + MB + MC \\
&= MA + AB - \cos(\alpha)AM + AC - \cos(\alpha)AM + o(AM) \\
&= f(A) + AM(1 - \cos(\alpha)) + o(AM).
\end{aligned}$$

Mais comme $\alpha \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $(1 - 2\cos(\alpha)) < 0$. Donc pour AM assez petit il vient $f(M) < f(A)$ et donc $f(A)$ n'est pas un minimum.

Étape 3 : P est dans le triangle :

Soit M extérieur au triangle. Disons qu'il se trouve dans le demi plan délimité par BC qui ne contient pas A (il est forcément dans un des demi plans de cette forme). On note M' sont symétrique par rapport à BC. Il est alors clair que $BM = BM'$ et $CM = CM'$ mais $AM > AM'$ donc $f(M) > f(M')$ donc M n'est pas minimal.

Étape 4 : Unicité du minimum

Si $O \in \mathbb{R}^2$ on note $F_O : M \mapsto OM$. C'est une application convexe avec égalité (ie. $F_O(tM + (1-t)N) = tF_O(M) + (1-t)F_O(N)$) ssi $O - M$ et $O - N$ sont colinéaires. Comme $f = F_A + F_B + F_C$, f est convexe comme somme d'applications convexes. De plus, le cas d'égalité implique que l'on ait

$$\begin{cases}
A - M \text{ colinéaire à } A - N \\
B - M \text{ colinéaire à } B - N \\
C - M \text{ colinéaire à } C - N
\end{cases}$$

ce qui implique que $M = N$ si on se trouve à l'intérieur du triangle. Ainsi, f est strictement convexe sur $\Delta \setminus \{A, B, C\}$ donc il y a au plus un minimum global. $\square$

Remarques importantes :

- Vérifiez bien que vous êtes ok avec l'étape 4, elle est rapidement faite ici.
- Vérifiez que vous comprenez bien pourquoi on peut supposer telle ou telle chose dans la preuve, pour vérifier que tous les cas sont équivalents.
- Je n'en parle pas mais il est possible de construire ce point à la main, c'est sans doute un plus de savoir le faire le jour j !
- Je ne montre pas la dernière assertion du théorème (celle sur les angles), je vous laisse le loisir de chercher, ça ne m'intéresse pas spécialement sachant que la preuve est déjà assez longue comme ça.